- **Problème 1** : « *On remplit 4 sacs avec 5 pommes chacun. Combien faut-il de pommes ?* »
- **Problème 2** : « *Trois enfants se partagent une tablette de chocolat de 12 carreaux. Combien de carreaux de chocolat aura chaque enfant ?* »
- **Problème 3** : « *Il y a 18 élèves dans la classe. Pour participer à une rencontre sportive, le professeur constitue des équipes de 3 élèves. Combien y aura-t-il d'équipes ?* »

La symbolisation et l'apparition du symbole mathématique « x » peuvent être proposées en fin de CP à partir des doubles ou des décompositions additives, **mais ne sont pas un attendu de fin de CP**. C'est la verbalisation et l'usage du mot « fois » qui introduira le signe mathématique : 2 fois 5 peut s'écrire 2 x 5 en langage mathématique, et de la même manière, 45, c'est 4 fois 10 plus 5. L'introduction du signe « : » est quant à lui prématuré à ce niveau de classe.

Les algorithmes opératoires de ces opérations ne relèvent pas du CP. L'apprentissage de l'algorithme de la multiplication se fait en CE2 et celui de la division en CM1.

Comment enseigner le calcul mental et le calcul en ligne au CP ?

Un enseignement structuré et une pratique régulière et répétée du calcul mental et du calcul en ligne va permettre de donner du sens aux propriétés opératoires et aux techniques de décomposition des nombres. C'est un travail conjoint, entre sens et technique, qui permettra à l'élève de construire un répertoire, une sorte de boîte à outils, disponible ensuite pour d'autres apprentissages (par exemple pour le calcul posé).

La mémorisation des faits numériques

Les faits numériques sont les résultats de calculs mémorisés disponibles immédiatement. Les recherches sont unanimes sur l'importance de la mémorisation des faits numériques pour l'apprentissage du calcul. En effet, ces derniers jouent un rôle important dans la mesure où ils soulagent la mémoire de travail. Il a été montré que la faiblesse ou l'absence de faits numériques accessibles influent négativement sur les apprentissages ultérieurs. Il est donc indispensable d'enseigner les faits numériques, d'aider les élèves à les mémoriser en explorant leurs régularités et d'en découvrir la beauté à travers le jeu. Les faits numériques à mémoriser au CP[22] sont rappelés dans le tableau suivant.

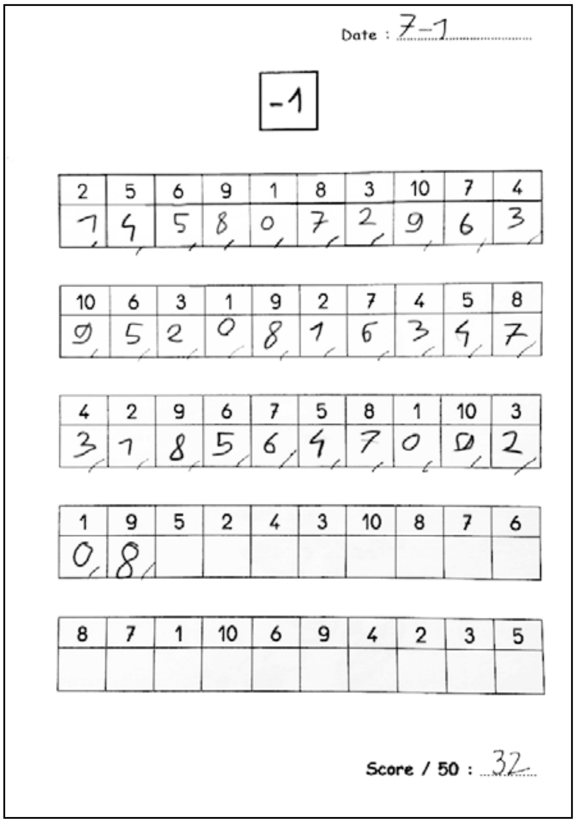
22 — BOEN n° 22 du 29 mai 2019, annexes 2 et 20, note de service n° 2019-072 du 28 mai 2019.

FAITS NUMÉRIQUES	EXEMPLES
COMPLÉMENTS à 10	Combien faut-il ajouter à 7 pour avoir 10 ? 7 + ... = 10
DOUBLES des nombres ≤ 10, ainsi que des dizaines entières (jusqu'à 50)	7 + 7 = ? 20 + 20 = ? Quel est le double de 7 ? de 20 ?
MOITIÉS des nombres pairs ≤ 20	Quelle est la moitié de 18 ?
LES DÉCOMPOSITIONS ADDITIVES des nombres ≤ 10	Donner 5 décompositions de 9
TABLES D'ADDITION des nombres ≤ 10	6 + 3 = ? 3 + ... = 9 9 – 3 = ?

Certains élèves mémorisent facilement ces faits numériques alors que d'autres ont besoin d'un entraînement plus long pour y arriver. S'il est indispensable, l'entraînement n'est pas le seul ressort de la mémorisation. Une bonne représentation mentale des nombres, la compréhension des opérations en jeu et une élaboration progressive des résultats constituent l'autre facette de l'apprentissage, tout aussi nécessaire à la mémorisation. En prenant appui sur les résultats connus, en développant la capacité des élèves à retrouver certains calculs et en proposant au bon moment des outils (matériel de numération, frise numérique, etc., cf. chapitre 4) ainsi que de nombreux entraînements (en collectif ou en groupes de besoin, dans le cadre de jeux ou d'entraînements spécifiques), le professeur va pouvoir atteindre de manière efficace cet objectif de mémorisation.

Par exemple, pour exercer la mémorisation des compléments à 10, l'enseignant pourra proposer différentes modalités d'entraînements à travers le jeu ou des ressources numériques (cf. chapitre 5). Il pourra aussi donner à ses élèves des calculs directs avec des consignes variées :

— « *Complète 3 pour faire 10.* »
— « *Combien manque-t-il à 3 pour faire 10 ?* »
— « *Que faut-il ajouter à 3 pour faire 10 ?* »


Date : 7-1

$\boxed{-1}$

2	5	6	9	1	8	3	10	7	4
1	4	5	8	0	7	2	9	6	3

10	6	3	1	9	2	7	4	5	8
9	5	2	0	8	1	6	3	4	7

4	2	9	6	7	5	8	1	10	3
3	1	8	5	6	4	7	0	9	2

1	9	5	2	4	3	10	8	7	6
0	8								

8	7	1	10	6	9	4	2	3	5

Score / 50 : 32

Figure 12. Production d'élève de CP en Rep+.

Une mémorisation solide des faits numériques et des procédures élémentaires est une condition nécessaire pour engager les élèves vers des calculs plus complexes. C'est donc **l'automatisation** de la restitution des faits numériques et procédures élémentaires que l'enseignant doit viser avec le développement chez les élèves de capacités de calcul rapides et précises. Il s'agit ainsi de développer **la fluence en calcul**. Pour cela, des entraînements nombreux et intensifs seront proposés pour augmenter la vitesse de calcul des élèves. Celle-ci pourra par exemple être évaluée par une série de calculs proposée en **temps limité**, dans l'ordre ou dans le désordre (cf. figure 12).

Focus | L'apprentissage des tables d'addition

« La principale difficulté rencontrée est que les élèves apprennent des résultats qui n'ont pas de sens pour eux. L'idée est de proposer une nouvelle démarche d'apprentissage, fondée sur les relations entre les nombres. Cette démarche repose sur un découpage du tableau de Pythagore en différents secteurs qui correspondent à une connaissance ou à une stratégie de calcul. »

Christophe Bolsius, *Fort en calcul mental ! Connaissances et stratégies pour réussir*, p. 27, Scéren, CRDP de Lorraine, 2011.

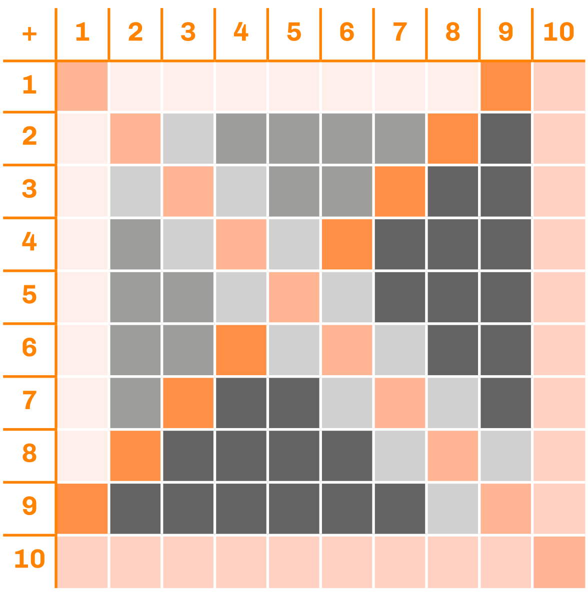


Figure 13. Table d'addition de Pythagore, un outil pour l'enseignant.

Le découpage proposé ci-contre (cf. figure 13) présente l'avantage de faire du lien avec la numération orale, la numération écrite (groupement par 10), le comptage, et permet d'installer, dès le CP, des stratégies de calcul variées (les presque-doubles, les additions à retenues) qu'il faudra entretenir. L'apprentissage des tables d'addition devient le résultat d'un long processus qui repose sur une élaboration progressive des résultats utilisant des points d'appui favorables à la mémorisation.

Le traitement par familles décrites ci-après permet aussi de construire une progressivité des apprentissages qui prend appui sur leur ordre d'introduction, qui va ici du clair vers le foncé (figure 14).

Cette proposition de progression débute par la famille n°1 (les suivants) et se conclut par la famille n° 7 (le passage par le paquet de 10). Les apprentissages des familles (n° 1, 2, 3, 4 et 6) sont indépendants les uns des autres et les familles (n° 5 et 7) sont élaborées à partir des précédentes. Notons la symétrie dans la table de Pythagore qui exprime la commutativité de l'addition et permet de réduire le nombre de faits numériques à retenir.

L'apprentissage de chaque famille s'appuie d'abord sur l'utilisation et la manipulation de supports adaptés (cubes, frise numérique, cartes à points, etc.) qui permettent de construire, à l'aide de la verbalisation, des images mentales. Celles-ci pourront ensuite être évoquées et favoriser ainsi la mémorisation et l'installation du répertoire additif.

FAMILLES	EXEMPLES	FAITS NUMÉRIQUES OU PROCÉDURE ÉLÉMENTAIRE
1. Les suivants	3 + 1 5 + 1	Procédure élémentaire
2. Les règles de numération	10 + 5 10 + 7	Faits numériques
3. Les doubles	2 + 2 3 + 3	Faits numériques
4. Les compléments à 10	2 + 8 4 + 6	Faits numériques
5. Les presque-doubles	4 + 5 6 + 7	Procédure élémentaire
6. Les sommes inférieures à 10	3 + 6 7 + 2	Faits numériques
7. Le passage par 10	7 + 5 6 + 8	Procédure élémentaire

Figure 14. Les différentes familles de calculs.

FAMILLE N° 1. LES SUIVANTS : LES CALCULS EN + 1

Il s'agit dans un premier temps d'expliciter le fait qu'« ajouter un » revient à dire le suivant (« *je connais quatre plus un, c'est celui qui vient après quatre, c'est cinq* »). Le professeur choisira le vocabulaire qui convient aux compétences de ses élèves (après/avant, suivant/précédent ou successeur/prédécesseur). Cet apprentissage s'appuie sur la connaissance de la comptine numérique et relève de la numération orale (cf. chapitre 1). On pourra ensuite étendre cette famille aux calculs en + 2.

FAMILLE N° 2. LES CALCULS EN + 10

Ces calculs additifs prennent appui sur la compréhension des premiers nombres à deux chiffres. Il s'agit de comprendre que « deux plus dix égal douze » s'écrit 2 + 10 = 12. Certaines difficultés des élèves peuvent venir du fait que le nom des nombres de 11 à 16 ne reflète pas leur écriture. Ce sont bien ici des connaissances en numération (orale et écrite) qu'il faut mobiliser.

FAMILLE N° 3. LES DOUBLES

Les doubles sont des faits numériques rappelés de façon plus sûre et plus rapide que les autres résultats. Leur mémorisation présente peu de difficulté et ils seront mobilisés fréquemment dans des calculs plus complexes. On utilisera progressivement les deux expressions « 8 plus 8 » et « 2 fois 8 ».

FAMILLE N° 4. LES COMPLÉMENTS À 10

Comme pour les doubles, il faut installer cette connaissance et l'entraîner tout au long de l'année de CP. Cette organisation en familles implique des choix, comme celui de travailler 5 + 5 = 10 comme un double ou comme un complément à 10 (5 + ? = 10).

FAMILLE N° 5. LES PRESQUE-DOUBLES

Une fois les doubles installés, il est intéressant d'utiliser ces résultats pour calculer les presque-doubles. Le professeur propose par exemple 6 + 5 en calcul mental. En utilisant les connaissances travaillées précédemment, les élèves peuvent proposer les stratégies suivantes : 6 + 5 = 6 + 6 – 1 = 12 – 1 = 11 ou 6 + 5 = 1 + 5 + 5 = 1 + 10 = 11. Le professeur devra valoriser ces deux stratégies (utiles pour des nombres plus grands), les institutionnaliser et les faire vivre dans la classe (cf. focus « Une séquence de calcul », p. 73).

FAMILLE N° 6. LES SOMMES INFÉRIEURES À 10

C'est le comptage ou surcomptage qui va permettre d'installer la mémorisation de ces faits numériques. L'usage du surcomptage, qui repose sur la maîtrise de la suite des nombres et la capacité à la réciter à partir de n'importe quel point de départ, ne sert qu'à installer les procédures qui seront automatisées par la suite.

FAMILLE N° 7. LE PASSAGE PAR 10

La procédure de passage par 10 s'appuie sur la connaissance des compléments à 10 (famille 4), la décomposition additive des nombres inférieurs ou égaux à 10 (famille 6) et les calculs en + 10 (famille 2). Par exemple, le calcul de 8 + 5 s'appuie sur 8 + 2 = 10 et sur 5 = 2 + 3, pour finalement conduire à 10 + 3 = 13. Le fait numérique 8 + 5 = 13, s'il est fréquemment réactivé, peut ensuite lui-même être mémorisé.

L'utilisation de la propriété de **commutativité** permet de réduire de manière significative la quantité de résultats à mémoriser. Toutefois, cette propriété ne peut prendre son sens qu'en situation et n'a pas à être imposée. Cependant, il est important que cette propriété soit enseignée et explicitée ; le professeur pourra dire et faire dire que, dans une addition, on peut changer l'ordre des nombres. Cette propriété devra ensuite être travaillée régulièrement en proposant par exemple des additions au tableau et en demandant leur réécriture sur ardoise dans le sens le plus économique au calcul, c'est-à-dire en mettant en premier le plus grand des deux nombres. Enfin, il faudra que les élèves automatisent l'usage de cette propriété car il s'agit d'une procédure élémentaire qui devra être mobilisable très rapidement.

La présentation sous forme de tableau à double entrée peut s'avérer complexe pour des élèves de CP qui auraient du mal à s'y repérer. Les exemples ci-contre sont des écrits qui peuvent être utilisés au fur et à mesure de la découverte des différentes familles (cf. figures 15, 16 et 17).

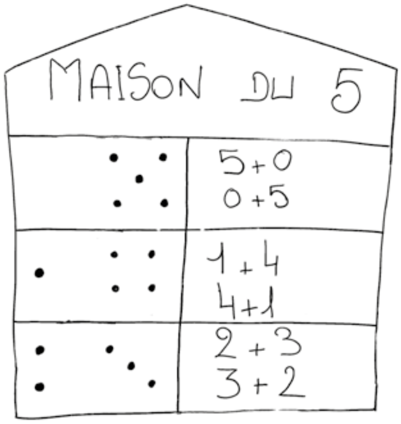


Figure 15. Affichage de la maison du 5.

Table de 5

5 + 0 = 5

5 + 1 = 6

5 + 2 = 7

....

5 + 10 = 15

Figure 16. Affichage de la table d'addition.

+	1	2	3	4	5
1	1 + 1 = 2	1 + 2 = 3	1 + 3 = 4	1 + 4 = 5	1 + 5 = 6
2	2 + 1 = 3	2 + 2 = 4	2 + 3 = 5	2 + 4 = 6	2 + 5 = 7
3	3 + 1 = 4	3 + 2 = 5	3 + 3 = 6	3 + 4 = 7	3 + 5 = 8
4	4 + 1 = 5	4 + 2 = 6	4 + 3 = 7	4 + 4 = 8	4 + 5 = 9
5	5 + 1 = 6	5 + 2 = 7	5 + 3 = 8	5 + 4 = 9	5 + 5 = 10

Figure 17. Affichage d'un extrait de la table de Pythagore.

Le calcul en ligne

Le calcul en ligne se distingue du calcul mental par le fait que les résultats intermédiaires ou les décompositions des nombres peuvent être écrits plutôt que stockés en mémoire de travail. Le calcul en ligne est donc une modalité de calcul proche du calcul mental, pour laquelle un écrit vient soutenir la mémoire de travail. Un calcul traité « en ligne » par un élève pourra être mené en « calcul mental » quelques mois ou années plus tard. Grâce à ce recours à l'écrit, l'élève peut traiter des calculs de niveau plus complexe et/ou gérer des nombres de taille plus élevée. Le calcul en ligne incite et entraîne les élèves à développer une souplesse intellectuelle. Il s'agit de construire en même temps la représentation des nombres et leurs possibles décompositions afin que numération et calcul cohabitent. Cette cohabitation donnera accès à une première formalisation des propriétés des opérations, à partir d'exemples numériques, qui seront plus tard installées dans le cadre du calcul algébrique (commutativité, associativité et distributivité de la multiplication sur l'addition essentiellement).

Cette modalité de calcul entraîne la mise en œuvre souvent implicite des propriétés des nombres et des opérations en jeu. Parmi les propriétés des opérations[23], on trouve :

— la commutativité : $5 + 23 = 23 + 5$, qui pourra être verbalisée aux élèves de la manière suivante : « *Dans une addition, on peut changer l'ordre des nombres* » ;
— l'associativité : $23 + (7 + 2) = (23 + 7) + 2$, qui pourra, par exemple, être verbalisée par : « *Dans une addition, on peut associer les nombres de différentes manières* » ;
— l'utilisation simultanée des deux propriétés de commutativité et associativité : $43 + 27 = 40 + 20 + (7 + 3)$;
— la distributivité de la multiplication sur l'addition, propriété plus complexe, sera illustrée par du matériel[24] et explicitée comme dans l'exemple : « *Le double de 21 c'est le double de 20 plus le double de 1* ».

Il convient d'axer le travail en classe sur l'explicitation et la confrontation des procédures possibles et efficaces afin de conduire les élèves à la recherche de procédures finalement moins coûteuses et plus sûres.

Les travaux de Denis Butlen et Monique Charles-Pézard[25] (2007) ont mis en évidence le paradoxe de l'automatisme qui traite des rapports liant automatisme et adaptabilité. Il s'agit d'un défaut d'adaptation des élèves les plus en difficulté qui préfèrent utiliser des procédures sûres de leur point de vue (algorithme posé dans la tête ou décomposition systématique du second terme du calcul) qui fonctionnent dans tous les cas mais s'avèrent coûteuses. C'est en développant davantage d'automatismes sur des procédures élémentaires (ajouter 10, ajouter un nombre entier de dizaines, etc.) que les élèves pourront mobiliser, pour un calcul donné, la procédure la plus économique et ainsi échapper à l'automatisme.

Il est aussi recommandé d'adopter une institutionnalisation qui porte à la fois sur la procédure et son domaine d'efficacité, de manière à montrer que toutes les procédures ne sont pas équivalentes. Cette institutionnalisation doit amener les élèves à prendre conscience de l'éventail et de la hiérarchie des procédures mises en œuvre pour un calcul donné (cf. exemple ci-contre).

De récentes recherches[26] ont montré que le souci de « traiter à égalité » tous les élèves, en particulier en éducation prioritaire, peut conduire les professeurs à prendre en compte toutes les productions, qu'elles soient primitives ou plutôt expertes. Celles-ci sont alors présentées « en vrac », sans hiérarchisation, ce qui est dommageable pour les apprentissages, le repérage des procédures à retenir restant à la charge de l'élève. La phase d'institutionnalisation demeure ainsi trop souvent implicite alors

23 — Les écritures mathématiques illustrant ici les propriétés des opérations s'adressent au professeur et ne sont pas attendues des élèves de CP. Ceux-ci pourront proposer d'autres écritures, par exemple avec l'utilisation de plusieurs égalités ou d'un arbre de calcul.
24 — Ce genre de propriété s'illustre avec des cubes emboîtés sur deux rangées.
25 — *Ibid*, p. 42, note 13.
26 — Voir Denis Butlen, Monique Charles-Pézard, Pascale Masselot, « Apprentissage et inégalités au primaire : le cas de l'enseignement des mathématiques en éducation prioritaire », contribution au rapport du Cnesco sur les inégalités scolaires d'origine sociale et ethnoculturelle, 2015.

qu'elle ne peut pas être assurée par tous les élèves. C'est en particulier les élèves en difficulté issus de milieux socialement défavorisés qui ont besoin de ces repères. Cette absence d'explicitation a pour conséquence de renforcer les écarts.

Les activités de calcul en ligne doivent conduire à une institutionnalisation et une structuration des connaissances par des affichages et des traces dans les cahiers des élèves. Sans ce « résumé », les élèves les plus en difficulté peinent à percevoir seuls l'enjeu du calcul ou la justification de la procédure la plus efficace.

EXEMPLE (FIN DE CP) : AJOUTER 9 À UN NOMBRE

Plusieurs procédures sont possibles et sont plus ou moins efficientes selon les nombres en jeu. Le choix de ces nombres par le professeur va permettre aux élèves d'exercer leur habileté en calcul en identifiant la procédure qui sera à la fois la plus efficace et la plus rapide. Ce choix s'appuie sur leurs connaissances des nombres et de leurs propriétés, et sur des faits numériques mobilisables.

- Si le nombre est 20, la procédure la plus efficiente est celle utilisant la connaissance du système de numération orale : vingt plus neuf égal vingt-neuf, qui peut s'écrire 20 + 9 = 29.
- Si le nombre est 21, la procédure la plus efficiente est le complément à la dizaine : 21 + 9 = 20 + (1 + 9) = 30.
- Si le nombre est 26, plusieurs procédures sont possibles :
  - celle du « + 10 – 1 » (si elle est connue des élèves) : 26 + 9 = 26 + 10 – 1 = 35 ;
  - celle reposant sur la décomposition additive et le complément à la dizaine (savoir que le complément à 10 de 6 est 4 et que 9, c'est 4 + 5) : 26 + 9 = 26 + 4 + 5 = 30 + 5 ;
  - celle reposant sur un résultat du répertoire additif (savoir que 6 + 9 = 15) : 26 + 9 = 20 + (6 + 9) = 35.

La plus efficiente est celle du « + 10 – 1 ».

EXEMPLE DE TRACE ÉCRITE

Pour ajouter 9 à un nombre,

- si le nombre se termine par 0, on peut ajouter directement les 9 unités : 20 + 9 = 29 ;
- si le nombre se termine par 1, on peut utiliser le complément à 10 : 31 + 9 = 30 + 1 + 9 = 30 + 10 = 40 ;
- dans les autres cas, on peut faire « + 10 – 1 » : 47 + 9 = 47 + 10 – 1 = 57 – 1 = 56.