

# Nombre et calcul au cycle 3

Arc Pergaud 23 janvier 19



## Un problème pour commencer

A la récréation, Dimitri joue aux billes. Au début de la partie il possède 37 billes. À la fin, il a 72 billes.

Combien a-t-il gagné de billes ?

Recherches/Calculs :

37 pour aller à 2

~~38-39-40-41-42-43-44-45-46-47~~  
~~48-49-50-51-52-53-54-55-56~~  
~~57-58-59-60-61-62-63-64-65-66~~  
~~67-68-69-70-71-72-73-74-75-76~~

Réponse :

il en a gagné 32

---

La construction du nombre au cycle 1

(ça c'est fait)

## Les cinq principes de Gelman

Principe de **correspondance terme à terme** : à chaque unité on fait correspondre **un seul mot-nombre**.

Principe de suite stable : **la suite des mots-nombres** est une **liste fixe sans fin qui grandit**.

Principe cardinal : **le dernier mot nombre prononcé** désigne **le cardinal** de l'ensemble.

Principe de l'indifférence de l'ordre : **les unités peuvent être comptées dans n'importe quel ordre**.

Principe d'abstraction : **toutes sortes d'éléments peuvent être rassemblés et comptés ensemble**.

## Le comptage-numérotage

Le **comptage-numérotage** fait **correspondre à un mot un élément**. Cela conduit l'enfant à concevoir les éléments successivement pointés avec le doigt comme « le un », « le deux », « le trois »...

Les mots prononcés sont alors des sortes de **numéros renvoyant chacun à un élément et un seul**.

## Le comptage-dénombrément

**Le comptage-dénombrément fait correspondre aux mots prononcés la pluralité des éléments correspondant.**

La correspondance terme à terme n'est pas celle entre un nombre dit et un élément mais celle entre chaque nombre dit et la pluralité des unités déjà énumérées.

**Chaque mot prononcé désigne une nouvelle quantité, celle qui résulte de l'ajout d'une nouvelle unité. On nomme ce phénomène l'itération de l'unité.**

## Comptage-numérotage ou comptage-dénombrément ?

**Les activités de dénombrément doivent éviter le comptage-numérotage.** Les enfants doivent comprendre que **toute quantité s'obtient en ajoutant un à la quantité précédente.**

Les trois années de l'école maternelle sont nécessaires et parfois non suffisantes pour stabiliser ces connaissances **en veillant à ce que les nombres travaillés soient composés et décomposés.**

**La maîtrise de la décomposition des nombres est une condition nécessaire à la construction du nombre.**

## Les attendus en fin d'école maternelle

Quantifier des collections jusqu'à dix au moins ; **les composer et les décomposer par manipulations effectives puis mentales.** Dire combien il faut ajouter ou enlever pour obtenir des quantités ne dépassant pas dix.

**Parler des nombres à l'aide de leur décomposition.**

L'apprentissage de la table d'addition au cycle 2

(ça c'est fait, ou pas...)

### Les suivants (connaissance)

| +  | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 |
| 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 |
| 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 |
| 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
| 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |

### Les règles de la numération (connaissance)

| +  | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 |
| 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 |
| 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 |
| 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
| 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |

### Les doubles (connaissance)

| +  | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 |
| 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 |
| 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 |
| 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
| 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |

### Les Compléments à 10 (connaissance)

| +  | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 |
| 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 |
| 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 |
| 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
| 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |

### Les sommes inférieures à 10 (connaissance)

| +  | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 |
| 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 |
| 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 |
| 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
| 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |

### Les presque-doubles (stratégie)

| +  | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 |
| 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 |
| 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 |
| 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
| 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |

### Le passage par 10 (stratégie)

| +  | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 |
| 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 |
| 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 |
| 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
| 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |

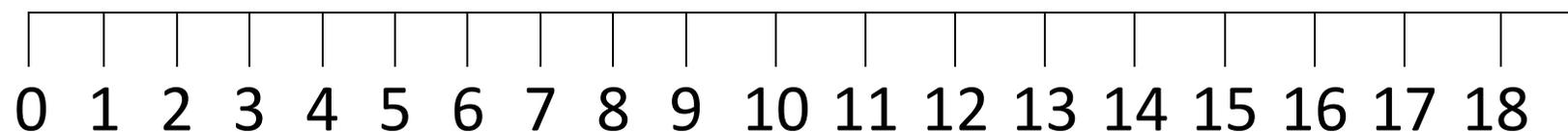
Le comptage / surcomptage (qui a pris une place très – trop – importante dans les pratiques de l'école maternelle) a un avenir et des performances très limités : il se limite à permettre d'appréhender des quantités très réduites devient très vite fastidieux.

**Il n'y a aucune opération mentale de calcul dans le comptage / surcomptage, mais une énumération rigoureuse associée à une connaissance verbale des mots-nombres.**

Voir expérimentation groupe de travail secteur de Gy

# File numérique ou file numérotée ? Droite graduée ?

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |     |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|



-

# Les tables de multiplication

(c'est fait ou presque, ou presque pas...)

Qui connaît la table du 3 ?

Lorsqu'un enfant a mémorisé les résultats des tables jusqu'à 5, et lorsqu'il sait utiliser la commutativité de la multiplication, il ne lui manque plus que 10 résultats pour maîtriser le répertoire dans son ensemble : **6 x 6, 6 x 7, 6 x 8, 6 x 9, 7 x 7, 7 x 8, 7 x 9, 8 x 8, 8 x 9 et 9 x 9.**

D'où l'importance de l'apprentissage des 5 premières tables au CE<sub>1</sub>. Comme les tables 1, 2, 4 (double de 2) et 5 sont particulièrement faciles à mémoriser, **la table du 3 a donc une grande importance stratégique.**

Les résultats dont **la mémorisation est la plus problématique** sont **6 x 3, 7 x 3, 8 x 3, 9 x 3 (et 7 x 4, 8 x 4 et 9 x 4).**

Utiliser les relations entre les nombres pour construire puis mémoriser les résultats des tables. Être vigilant quant à l'écriture des tables. Par exemple table du 3 : 1 fois 3, 2 fois 3, 3 fois 3... On « avance de trois ».

## Calcul automatisé et calcul réfléchi

Deux composantes principales : **le calcul automatisé** et **le calcul réfléchi**. Cette partition est modulable et évolutive pour chaque individu.

**Le calcul automatisé** concerne les résultats ou les procédures automatisées **gardées en mémoire**, stables dans le temps, qui constituent une base pour le calcul réfléchi.

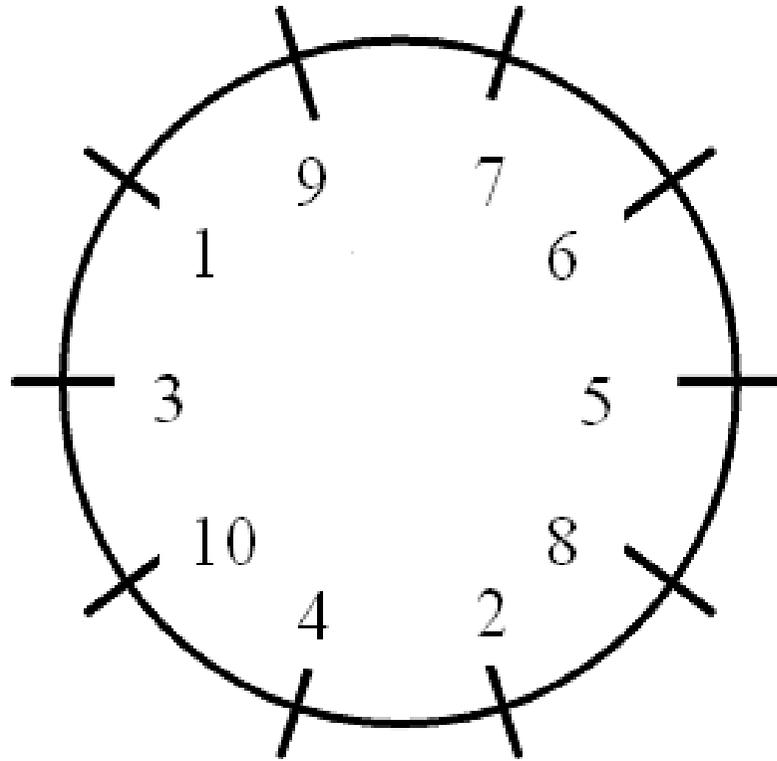
**Le calcul réfléchi** est le prolongement du calcul automatisé avec **emploi de procédures** qui utilisent le calcul automatisé, mental ou écrit.

Par exemple concernant pour la table du 3 :

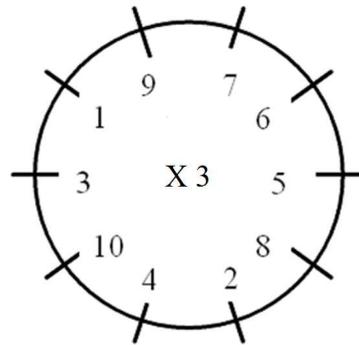
| <b>Calcul automatisé</b> | <b>Calcul réfléchi</b>  |
|--------------------------|---|
| 1 x 3 = 3                | 4 x 3 c'est 3 x 3 plus 3, c'est 9 + 3, c'est donc 12,               |
| 2 x 3 = 6                | ou 5 x 3 moins 3, c'est 15 - 3, c'est donc 12.                      |
| 3 x 3 = 9                | Mêmes procédures pour 7 x 3 et 9 x 3.                               |
| 5 x 3 = 15               |   |
| 6 x 3 = 18               | 8 x 3 c'est le double de 4 x 3, c'est donc 2 fois 12 ou 12 plus 12, |
| 10 x 3 = 30              | c'est donc 24.  |

L'emploi du calcul réfléchi n'est rendu possible que grâce à une très bonne connaissance des relations entre les nombres.

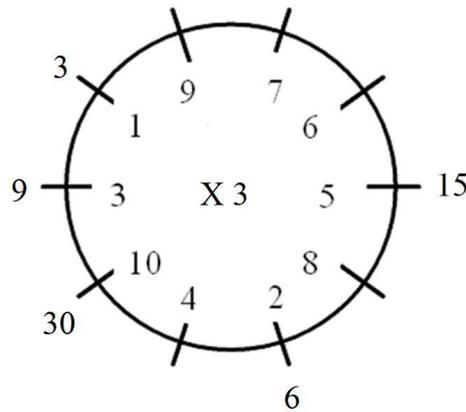
## Le dispositif de la roue



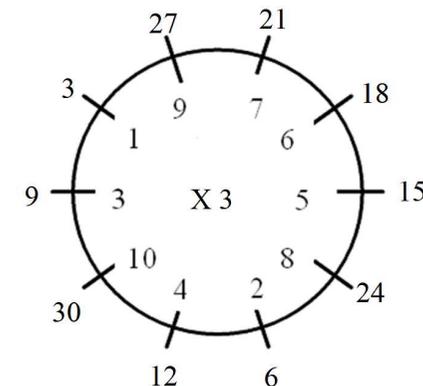
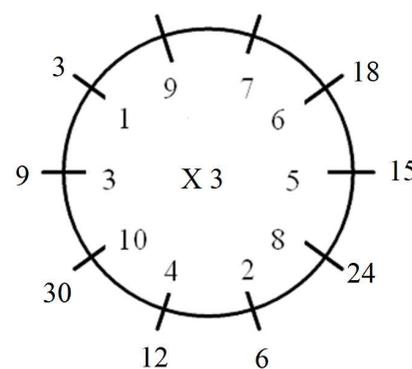
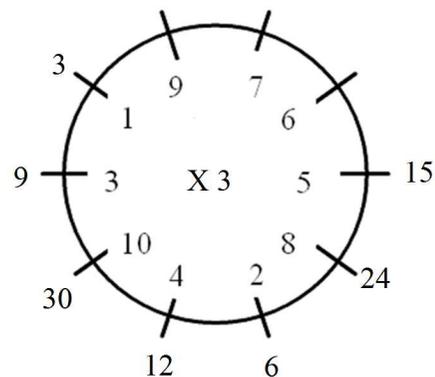
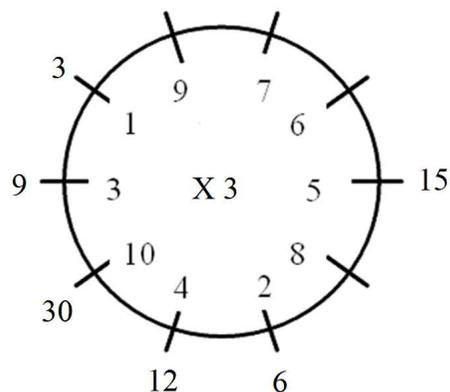
Il s'agit de compléter la roue en multipliant les nombres par 3 dans l'ordre souhaité par l'élève (état initial).



Dans un premier temps, les élèves indiquent les résultats qu'ils connaissent (calculs automatisés).



Puis en utilisant leurs connaissances de la table et des relations entre les nombres, ils complètent la roue au fur et à mesure (voir tableau calcul automatisé, calcul réfléchi).



Possibilité d'utiliser la roue « à l'envers » : les résultats à l'extérieur sont donnés, trouver les nombres correspondant à l'intérieur (ou mixer els deux dans une même roue).

Voir également texte Fayol et Chesné

## Les conditions de la mémorisation

- **Compréhension des opérations** mises en jeu : sens des quatre opérations.
- Prise de conscience de l'intérêt qu'il peut y avoir à disposer d'**un répertoire de résultats** : progressivement, ce répertoire est organisé, complété et structuré en table.
- **Utilisation du calcul automatisé** pour trouver un résultat de manière réfléchie.
- **Entraînement des résultats mémorisés.**
- **Disponibilité des résultats** : connaître  $3 \times 7$ , c'est être capable de répondre 21 immédiatement, mais c'est également pouvoir répondre immédiatement à « quel nombre multiplié par 7 donne 21, 21 divisé 7, 21 divisé par 3 ? ».

# Le calcul en ligne

## Qu'est-ce que le calcul en ligne ?

Le calcul en ligne est une modalité de calcul **écrit ou partiellement écrit**. L'énoncé est donné par le professeur à l'oral ou à l'écrit ; le résultat est donné par l'élève à l'écrit.

Il se distingue à la fois :

- du **calcul mental**, en donnant la possibilité à chaque élève, s'il en ressent le besoin, d'écrire des étapes de calcul intermédiaires qui seraient **trop lourdes à garder en mémoire**,
- du **calcul posé**, dans le sens où il ne consiste pas en la mise en œuvre d'un **algorithme indépendant des nombres en jeu**.

Comme le calcul mental, le **calcul en ligne** permet à l'élève d'**utiliser la richesse de ses connaissances sur le nombre** et sur les propriétés des opérations.

L'élève est ainsi amené à « **faire parler** » **les nombres**, c'est-à-dire à en envisager diverses écritures, des décompositions additives, multiplicatives ou utilisant les unités de numération.

## Le statut du signe « = »

**Ne pas sanctionner l'écrit de l'élève** si la démarche sous-jacente est bonne (comme dans notre exemple) mais lui expliquer qu'il serait préférable de décomposer en plusieurs lignes de calcul.

**L'enseignant**, lui, *ne doit jamais proposer au tableau d'écrits incorrects* sur le plan mathématique.

Voir expérimentation Arc Pergaud

# Les nombres décimaux et les fractions

## Préambule

**Les nombres décimaux permettent de pallier l'insuffisance des nombres entiers pour la résolution de nombreux problèmes** de mesure ou de partage. Les nombres décimaux et plus généralement les fractions sont **des nouveaux nombres** qui permettent de résoudre de nouveaux problèmes.

Les nombres décimaux sont des nombres fractionnaires (que l'on appellera nombres rationnels au collège) particuliers, qui peuvent s'écrire sous forme de fraction dont le dénominateur est une puissance de 10.

## Les obstacles

Certains raisonnements et certaines procédures correctes avec les nombres entiers peuvent ne plus l'être avec les nombres décimaux et les fractions.

Par exemple :

- La **comparaison** de 2 nombres dont le nombre de chiffres est différent.
- La notion de nombre qui suit (« **juste avant** », « **juste après** ») n'a plus de sens.

L'apprentissage des décimaux peut être perturbé par de fausses représentations. Par exemple :

- **Partir des cas particuliers** de mesure (par exemple les longueurs) n'aide pas à considérer les nombres décimaux comme des nouveaux nombres mais comme une transformation d'écriture (35 mm = 3,5 cm).
- Il est difficile de considérer que certains décimaux sont de nouvelles écritures de nombres connus (12,00 = 12).
- De nombreuses erreurs de comparaison ou de calcul sont basées sur **une représentation d'un nombre décimal comme un couple de nombres entiers séparés par une virgule.**

## La valeur positionnelle des chiffres

Multiplier par 10,100 ou 1000 : ce n'est pas la virgule que l'on décale vers la droite, il s'agit d'un décalage vers la gauche du nombre dans le tableau de numération. Dès le CE<sub>2</sub>,  $23 \times 10 = 230$  car 23 dizaines égale 230. La compréhension et le maîtrise de la valeur relative d'un chiffre, du nombre de... sont à conforter sur les nombres entiers avant d'aborder les nombres décimaux.

Voir l'activité du glisse-nombre

« Jungle Speed 24 »

Semaine des mathématiques

## Conclusion

Renforcer **les connaissances sur les décompositions de nombres** pour explorer de nouvelles procédures automatisées.

En calcul mental, **les procédures doivent être enseignées pour être automatisées**. Une procédure est automatisée quand l'élève effectue un calcul sans que celui-ci ne la construise.

**Travailler les échanges et les regroupements** (bases de la numération) favorise le calcul mental.

Etre expert, c'est **choisir** une procédure personnelle. C'est une initiative, un choix. C'est être capable **de choisir parmi les procédures apprises :**

- celle qui est la plus adaptée aux singularités, à la « personnalité » **des nombres en présence,**
- celle qui est la plus adaptée aux performances acquises à un moment de sa scolarité.

**Un automatisme n'est pas un moyen pour comprendre plus vite ;  
il permet simplement d'aller plus vite lorsque l'on a compris.**